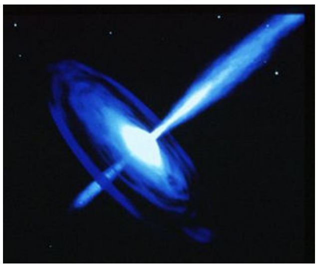
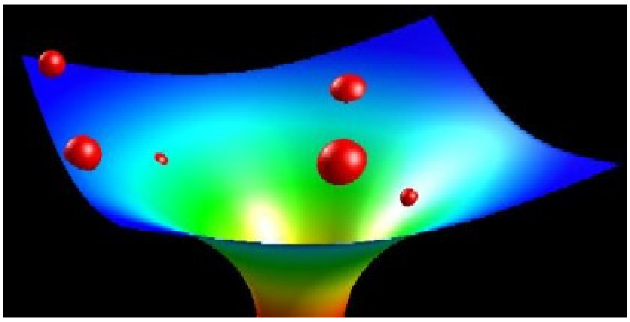
Schwarze Löcher
- im Hinblick auf einige ausgewählte Sachverhalte -

Eine Arbeit von Ralf Wunderlich.



Dieser Aufsatz soll Licht ins buchstäbliche Dunkel der Schwarzen Löcher bringen.
Dabei möchte ich mich nicht nur auf populärwissenschaftliche Erklärungen beschränken, sondern auch einwenig Mathematik ins Spiel bringen – die allerdings für jeden Interessenten verständlich sein sollte. Das Ganze soll in etwa wie folgt gegliedert sein:

1. Was ist ein Schwarzes Loch



Schon im Jahre1783 taucht von einem britischen Pfarrer namens John Michell die erste Spekulation über „dunkle Sterne“ auf, die durch ihre Gravitation selbst Licht gefangen halten können. Und auch der eher bekannte Pierre Simon Laplace hatte 1795 den gleichen Gedanken.
Spricht man heute in der Physik von einem Schwarzen Loch, wird dieses als so genannte Singularität in der vierdimensionalen Raumzeit bezeichnet. Es sind kompakte astronomische Objekte, die durch ihr enorm starkes Gravitationsfeld das Raumzeitkontinuum so stark krümmen, dass keine Materie, kein Licht noch jegliche Information aus dem Schwarzen Loch gelangen kann. Die Grenze des Schwarzen Lochs zu seiner Umgebung wird als Ereignishorizont tituliert. Das Wort Singularität (abgeleitet aus dem lateinischen Wort "singularis", was soviel bedeutet wie einzeln, vereinzelt, eigentümlich oder außerordentlich) bezeichnet in der Mathematik eine Stelle, an der ein Funktion oder ein geometrischen Objekt ein ungewöhnliches Verhalten zeigt. Gleiches gilt auch in der Physik beziehungsweise der Astronomie, was in unserem Fall Schwarze Löcher betrifft. Man spricht also von einer Singularität, wenn physikalische Gesetze nicht definiert oder ungültig sind, also die entsprechenden Verhältnisse nicht beschrieben werden können.
(Erwähnenswert scheint mir, dass noch nie eine reale physikalische Singularität beobachtet worden. Was auch bei einem Schwarzen Loch nicht möglich ist, wie sich später noch rausstellen wird.)
Bezogen auf die Singularität eines Schwarzen Lochs heißt das, dass in einem solchen keine uns bekannten physikalischen Gesetzte mehr gelten. So sind zum Beispiel alle Skalen in der Singularität eines Schwarzen Lochs auf NULL „geschrumpft“. Es gibt also keine räumliche Ausbreitung, noch verstreicht Zeit, was folglich bedeutet, dass in einem Schwarzen Loch keine Zeit existent.
Für die Spezialisten: Bezogen auf die Zeit sagt man auch, die relativistische Zeitdilatation ist unendlich.

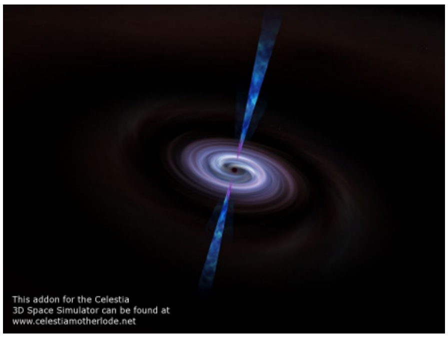
2. Charakterisierung eines Schwarzen Loches

Um ein Schwarzes Loch komplett zu beschreiben braucht es nur drei Eigenschaften. Die Masse, den Drehimpuls und die elektrische Ladung. Diese Tatsache entlockte John Wheeler die Aussage „Schwarze Löcher haben keine Haare.“, weshalb man seitdem vom „No-Hair-Theorem“ spricht.
Wobei hier die Masse stark variieren kann. So reicht die Spanne von stellaren Schwarzen Löcher mit einer Masse ab ungefähr drei $M_\odot$ ($M_\odot$ = Sonnenmassen = $1{,}9891 \cdot 10^{30}$ kg = 332.946 Erdmassen), bis zu galaktischen Schwarzen Löchern von bis zu 10^6 $M_\odot$, oder gar 10^8 $M_\odot$. Die exakte Massenuntergrenze eines Schwarzen Loches ist allerdings nicht bekannt. Nach Untersuchungen von Oppenheimer und Volkoff ist dieses Masseminimum erreicht, wenn die Schallgeschwindigkeit in einem Neutronenstern (die minimal masseärmere Variante einer „Sternleiche“) gleich der Lichtgeschwindigkeit ist. Nur fehlt aber zurzeit noch das genaue Verständnis der Materieform eines Neutronensterns, von der der exakte Wert der so genannten Oppenheimer-Volkoff-Grenze natürlich abhegt. Der Knackpunkt dabei sind die

Zustandsgleichungen von Kernmaterie bei derart exorbitanten Dichten von 4,6 x 10^{14} $g \cdot cm^{-3}$, die in einem Neutronenstern ohne weiteres vorherrschen. So ergeben sich je nach unterschiedlichen Annahmen der Zustandsgleichungen Werte von 2,6 $M_{\odot}$ bis 3,2 $M_{\odot}$.
Kommen wir zur zweiten Eigenschaft eines Schwarzen Lochs, dem Drehimpuls.
Bei der ersten mathematischen Lösung für ein Schwarzes Loch aus den Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie von Karl Schwarzschild (1873-1916), ging dieser von einem nicht rotierenden kugelförmigen symmetrischen Körper aus, was sicher eine gute Annäherung an ein reales Schwarzes Loch ist, aber sich nirgends im Universum finden lässt. Denn jedes Schwarze Loch hat einen Drehimpuls, der ungleich Null ist. Es gibt also ausschließlich rotierende Schwarze Löcher. Der Grund dafür ist in der Entstehung eines solchen massiven Objektes zu suchen. Ein Schwarzes Loch ist so gesehen nichts anderes als das extremste zu erreichende Endstadium eines „sterbenden“ Sterns. Da jeder Stern einen Drehimpuls besitzt, welcher wiederum aufgrund seiner Entstehung herrührt und der Drehimpuls eine fundamentale Erhaltungsgröße ist, diese also nicht einfach verloren geht, wird dieser beim Sternkollaps auf das Schwarze Loch übertragen. Um die Entstehung des Drehimpulses eines Stern zu erklären, der letztendlich auf das Schwarze Loch transformiert wird, schiebe ich an dieser Stelle einen Auszug aus einer meiner früheren Arbeiten „Sterne als Astronomische Objekte und ihre Rolle im Universum“ (2004) ein:
„*2.1. Rotation*
Es wurde im ganzen Universum noch kein Stern gefunden, der sich nicht dreht. Das ist kein Zufall, aber woran liegt das? Die Sterne rotieren zwar mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten um ihre Achsen, dennoch ist der Grund stets der gleiche und ist in der Entstehungszeit des Stern zu suchen.
Zu Beginn ist in der großen Gaswolke, in der später Sterne entstehen keine Drehung vorhanden.
Gaswolken sind aber nicht homogen, haben also nicht überall die gleiche Dichte.
In der großen Gaswolke gibt es also Bereiche in denen die Dichte größer ist als in anderen. Dort wird ein Stern entstehen.
In diesen Stellen kommt es zum Anstoßen der Gasteilchen untereinander. Dies geschieht allerdings nicht symmetrisch. Die Gaswolke wird also nicht genau in ihren Mittelpunkt getroffen (dies wäre ein zentraler elastischer oder unelastischer Stoß), was keine Drehung hervorrufen würde.
Der „Dichteklumpen“ beginnt sich zu drehen, weil das Anstoßen von asymmetrischer Art ist. Die Gaswolke wird zum Beispiel auf einer Seite mehr als auf der anderen angestoßen.
Durch diesen Vorgang bei der Sternentstehung erhält die Gaswolke eine Erhaltungsgröße, den Drehimpuls. Der Drehimpuls bleibt in einem System, also in diesem Fall in der Gaswolke, ewig erhalten.“

Die letzte der drei maßgeblichen Eigenschaften eines Schwarzen Lochs ist seine elektrische Ladung. Dazu lässt sich im Rahmen dieser Abhandlung nur sagen, dass nach Untersuchungen von Gunnar Nordström und Hans Reissner im Inneren Schwarzer Löcher elektrische Ladungen existieren können. In diesem Fall spricht man demnach von elektrisch geladenen Schwarzen Löchern.

3. Entstehung eines Schwarzen Lochs



Da ein Schwarzes Loch eine Sternenleiche ist, muss also geklärt werden, warum ein Stern zu einem Schwarzen Loch wird und nicht etwa zu einem weißen Zwerg oder einem Neutronenstern? Welche Vorraussetzungen müssen also erfüllt sein? Wie so oft in der Astronomie ist die wesentliche Eigenschaft die Masse des Objektes.
Während der gesamten Existenz eines Sterns etabliert sich in seinem Inneren ein Gleichgewicht zwischen nach innen gerichteten Druck, der von der Eigengravitation des Sterns selbst herrührt (p_G), und dem nach außen gerichteten Gasdrucks p_{Gas} und dem durch die Kernfusion frei werdenden Strahlungsdruck p_{Str}.

$$-p_G = p_{Gas} + p_{Str}$$

Abhängig von der Anfangsmasse und der chemischen Zusammensetzung des Sterns kann der nach außen gerichtete Strahlungsdruck irgendwann nicht mehr aufrecht gehalten werden, weil keine weiteren Fusionsprozesse im Sterninneren mehr möglich ist. Es entsteht also ein Ungleichgewicht in dem der stabilisierende Strahlungsdruck der Eigengravitation unterliegt. Die Folge ist klar: Der Stern bricht unter seinem Eigengewicht zusammen, wodurch sich seine Dichte natürlich maßgeblich erhöht. Nun hängt es von der Masse des Sterns ab, wann dieser Kollaps gestoppt werden kann. Die erste aufkommende gegen wirkende Kraft ist erstaunlicher Weise eine direkte Folge aus einem Gesetz der Quantenwelt – dem Pauliprinzip. Demnach dürfen nur maximal zwei Elektronen auf einer energetischen Zustandsebene vorkommen. Sind diese beiden Zustände im Sternenplasma besetzt baut sich ein Art Druck beziehungsweise Abstoßungskraft auf, die verhindert, dass ein weiteres Elektron diesen Zustand einnehmen kann (es kommt zur entarteten Materie). Man spricht vom Entartung- oder Fermi-Druck der Elektronen (Elektronendruck), der der Kompression durch die Gravitation entgegenwirkt.
Dieser Prozess trifft bei Endsternenmassen von weniger als 1,44 Sonnenmassen ein, es entsteht ein Weißer Zwerg.
Liegt die Masse direkt nach Ende der Kernfusionsprozesse dagegen zwischen 1,44 und ungefähr 3 Sonnenmassen, muss man eine Anpassung der Gesetze formulieren. Bei dieser Masse kann der Kollaps nämlich nicht mehr durch die Abstoßungskräfte zwischen den Elektronen gestoppt werden. Es entsteht, unter der Explosion einer Supernova, ein Neutronenstern, der durch seine enorme Masse einen ebenso unglaublichen Druck aufbaut, sodass die Elektronen in die Atomkerne des Plasmas gedrückt werden und so die darin enthaltenden Protonen mit den Elektronen zu Neutronen und Elektronenneutrinos reagieren.

$$e^- + p = n + \upsilon_e$$

Da das Pauli-Prinzip nun aber für alle Fermionen gilt (und dazu gehören auch Neutronen), kann nach diesem Prozess ein größerer Fermi-Druck (in diesem Fall ein Neutronendruck), als bei den Elektronen aufgebaut werden – ein weiterer Kollaps wurde verhindert.

Wir die Sternenendmasse von etwa drei Sonnenmassen überschritten, kann der Gravitationsdruck nicht mehr aufgehalten werden. Nun ist die Herausbildung eines Schwarzen Lochs unvermeidlich.
Wir haben bisher ausschließlich von End- und nicht von Anfangsmassen der Sterne gesprochen – aus einem einfachen Grund. Die Frage nach der Abhängigkeit der Endstadien eines Sterns von seiner Anfangsmassen ist ungeklärt. So ist es je nach Annahme einer bestimmten Emissionsrate des Sonnenwindes möglich, dass ein Stern mit einer anfänglichen Masse von 60 $M_\odot$ vor seiner Supernovaexplosion, die ebenfalls einen erneuten Masseverlust hervorruft, nur noch 4,5 bis mehr als 30 $M_\odot$ besitzen kann. Zudem ergibt sich die Ungenauigkeit auch aus Unverständnis der Durchmischungsprozesse in der Konvektionszone. (Quelle: Schwarze Löcher als Astronomische Objekte – Zusammenfassung zur kumulativen Habilitation, von Jörn Wilms, Mai 2002 – Kap. 2)
So erbeben sich also je nach Modell verschiedene Grenzmassen der Hauptreihensterne, die zur Entstehung eines Schwarzen Lochs führen.
Die oberste Grenzmasse, die ein Neutronenstern erreichen kann ohne zu einem Schwarzen Loch zu kollabieren, ergibt sich, wie oben schon erwähnt, durch Berechnungen von Oppenheimer und Volkoff und wird als Oppenheimer-Volkoff-Grenze bezeichnet.
Nun gibt es nach der Meinung von Stephen Hawking allerdings auch eine zweite Möglichkeit die theoretisch zur Entstehung eines Schwarzen Lochs führen könnte. Demnach könnten sich Schwarze Löcher in der Entstehungsphase des frühen Universums gebildet haben. Besaßen diese massiven Objekte eine anfängliche Masse über ein paar Milliarden Tonnen, würde sie auch heute noch existieren, und könnten so, versteckt fernab jeder Materie, im Dunkeln einen erheblichen Teil der Gesamtmasse des Universums darstellen.

4. Ereignishorizont - Schwarzschildradius

Die Berechnung des Schwarzschildradius ermöglicht es ein quantitatives Maß für die Größe eines Schwarzen Lochs zu erhalten. Dabei gibt dieser den kugelsymmetrischen Einflussbereich des Schwarzen Lochs an, in dem die Gravitation so stark ist, dass sie den Raum um die Singularität herum so weit krümmt, dass selbst das Licht dieses Bereich nicht verlassen kann. Oder anders gesagt: Der Bereicht um die Singularität eines Schwarzen Lochs, in dem die Entweichgeschwindigkeit v_e größer bis gleich der Lichtgeschwindigkeit c ist, wird als Schwarzschildradius bezeichnet.

$$v_e \geq c$$

Man spricht an der Grenze zwischen dem Schwarzschildradius und der Umgebung auch vom Ereignishorizont. Da bekanntlich Informationen nicht schneller als mit Lichtgeschwindigkeit übertragen werden können, ist es unmöglich Informationen aus dem Gebiet innerhalb des Schwarzschildradius zu bekommen (Das ist auch der Grund, warum die „nackte“ Singularität eines Schwarzen Lochs nicht existieren kann – es ist einfach nicht möglich den Mittelpunkt eines Schwarzen Lochs zu „sehen“). Dies führt zu einem nicht zu unterschätzenden Problem, da demnach eines der wichtigsten Erhaltungssätze gebrochen wird: Informationen gehen nicht verloren. Was letztendlich im Schwarzlochparadoxon endet, auf das ich später zurückkommen werde.
Versuchen wir nun aber vorerst die Formel des Schwarzschildradius herzuleiten.

Wir haben gesagt, dass am Ereignishorizont die Entweichgeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit ist. Nun lässt sich dies bei einer klassischen Herleitung der Formel auch auf die entsprechenden Energien übertragen. Bezüglich eines Photons ist diese gegeben durch

$$E_{ph} = h \cdot f \ .$$

Diese ist für unsere Zwecke allerdings nicht geeignet und wird durch die entsprechende Umwandlung in kinetische Energie ersetzt.

$$E_{ph} = \frac{m}{2} c^2$$

Dies entspricht der Energie, die das Photon entgegen der Gravitation des Schwarzen Lochs aufbringen kann, welche sich nach der Newtonschen Formel für potentielle Energie mit

$$E_{pot} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

berechnet wird, wobei G die Gravitationskonstante ($G \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$), M die Masse des Schwarzen Lochs, m die Masse des Photons und r der Abstand ist.
Wir setzten nun die potentielle Energie und die Energie des Photons gleich, da dies den Verhältnissen am Ereignishorizont entspricht.

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{r} = \frac{m}{2} c^2$$

Die Masse des Photons lässt sich kürzen und wir erhalten durch Umstellen nach r

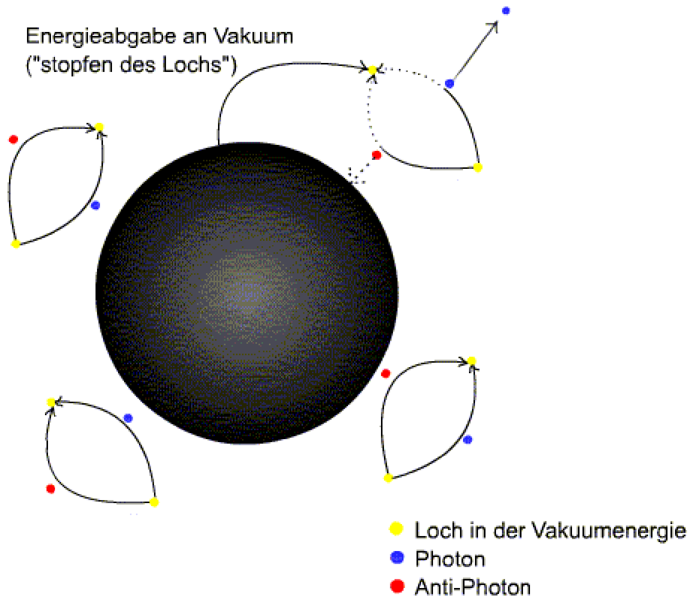
$$r = G \cdot \frac{2M}{c^2}$$

, was der Formel des Schwarzschildradius entspricht. In der Astrophysik wir das kleine r üblicherweise mit einem großem R ersetzt.

$$R = G \cdot \frac{2M}{c^2}$$

5. Hawking-Strahlung

Um das Phänomen der Hawking-Strahlung zu verstehen, braucht es einige Vorkenntnisse über das Wesen der Quantenmechanik – genauer über die Entstehung virtueller Teilchen.



In der Quantenmechanik ist es möglich, dass sich aus der so genannten Vakuumenergie virtuelle Teilchen bilden. Denn in der Welt der Quanten gibt es keinen absolut leeren Raum, den man als Vakuum im klassischen Sinne beschreiben könnte. So bilden sich im Zuge der Vakuumfluktuationen unablässig jeweils ein Teilchen und sein entsprechendes Anti-Teilchen, die sich nach kurzer Zeit sofort wieder gegenseitig vernichten. Als ein oft erwähntes Beispiel gilt hier die Erzeugung von Elektronen und Positionen, oder die eines Photons und eines zweiten Lichtteilchens, das den entgegen gesetzten Impuls, als auch umgekehrten Spin besitzt.

Diese Erscheinung der spontanen Entstehung von Teilchen lässt sich durch die Heisenbergsche Unschärferelation erklären – speziell der Unschärfe von Energie und Zeit, die sie beschreibt. Demnach gilt folgendes Gesetz:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2}$$

Wobei ΔE die Energieunschärfe, Δt die Unschärfe in der Zeit und h das Plancksche Wirkungsquantum ($6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Js) darstellt. Das Produkt aus Zeitunschärfe und Energieunbestimmtheit kann den Wert von

$$\frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2}$$

also nie unterschreiten.

Diese Unbestimmtheit im Vakuum ermöglicht also diese Teilchenerzeugung, die man sich als Ausleihen von Energie aus dem leeren Raum für eine sehr kurze Zeit vorstellen kann. Aber wie kurz ist diese Zeitspanne? Diese Frage lässt sich leicht beantworten. Dazu muss die Heisenbergsche Unschärferelation auf die Zeitunbestimmtheit umgestellt werden, wo bei wir von

$$\Delta E \cdot \Delta t = \frac{h}{4\pi}$$

und nicht von

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}$$

ausgehen. Wir setzten also die minimale Unschärfe voraus.
So ergibt sich nach erfolgreichen Umstellen:

$$\Delta t = \frac{h}{4\pi \cdot \Delta E}$$

Gehen wir mit einer weiteren Annahme davon aus, dass es sich um ein Photonenpaar handelt, da diese für die spätere Betrachtung der Hawking-Strahlung von Bedeutung werden, ist die Energie von dessen Frequenz f direkt proportional abhängig und berechenbar durch

$$E_{ph} = h \cdot f \ .$$

Da wir von einem Photonenpaar reden muss dieser Energiewert verdoppelt werden.

$$2 \cdot E_{ph} = 2 \cdot h \cdot f$$

Setzten wir das in die umgestellte Formel von Heisenberg ein, erhalten wir

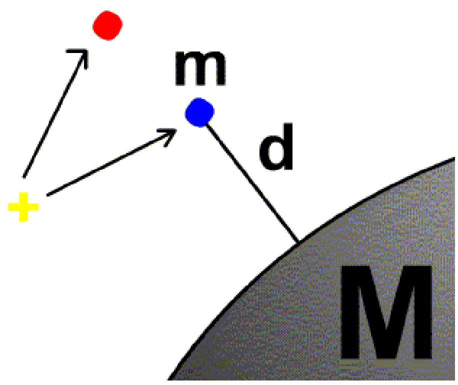
$$\Delta t = \frac{h}{8\pi \cdot h \cdot f}$$

, was nach Kürzen die fertige Formel für die Lebensdauer eines virtuellen Photonenpaares ergibt.

$$\Delta t = \frac{1}{8\pi \cdot f}$$

Man sieht, dass es sich um sehr kurze Zeiten handelt, die sich im Bereich von Attosekunden bewegen, was einem Millionstel, eines Millionstel eines Millionstel einer Sekunde entspricht (10^{-18} s).
Deshalb ist es auch möglich, dass die virtuellen Teilchen scheinbar dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik, dem der Energieerhaltung, widersprechen. Da sie sich nach derartig kurzer Zeit aber wieder gegenseitig vernichten, bleibt dieser Erhaltungssatz schon in gering größeren Zeitabständen konstant und behält somit seine Gültigkeit.
Betrachten wir diesen Prozess allerdings in unmittelbarer Nähe des Ereignishorizonts eines Schwarzen Lochs, kann es durchaus passieren, dass eines der beiden virtuellen Photonen des virtuellen Teilchenpaars aufgrund der Gravitation beziehungsweise Raumkrümmung unwiderruflich jenseits des Ereignishorizonts verschwindet. Was zur Folge hat, dass dem Photon außerhalb des Schwarzen Lochs kein Anti-Teilchen zur Vernichtung gegenübersteht. Es wird zu einem reellen Teilchen. Nun lässt dieses Teilchen aber ein Minus in der Vakuumenergie zurück. Da aber selbst in der Quantenmechanik das Prinzip der Energieerhaltung für längere Zeit nicht verletzt werden darf, muss der Energieverlust des Vakuums ausgeglichen werden. Dies vollzieht sich, indem die Energie aus dem Schwarzen Loch entnommen

wird, um dieses „Energieloch“ im Vakuum zu schleißen. So verliert das Schwarze Loch also Energie, beziehungsweise nach Einsteins Formel $E=mc^2$, Masse. Dass die Energie aus dem Schwarzen Loch kommt, sieht in dieser Erklärung wie eine Vermutung aus, ist mit komplizierter Quantenmathematik aber beweisbar und beruht auf dem Tunneleffekt. Die Strahlung kommt also nur scheinbar aus dem Inneren des Schwarzen Lochs und wird tatsächlich um den Ereignishorizont, außerhalb des massiven Objekts, emittiert.
Die Strahlung, die durch das „verschlucken“ eines Lichteilchens eines virtuellen Photonenpaar entsteht, wird als Hawking-Strahlung bezeichnet. Dabei zeigt die Hawking-Strahlung die gleiche Verteilung wie Hohlraumstrahlung, was das Vorhandensein einer Temperatur des Schwarzen Lochs vermuten lässt. Diesen Sachverhalt werde ich aber erst später erläutern.
Wenden wir uns zuvor der mathematischen Betrachtung der Hawking-Strahlung zu. Zuerst müssen wir uns im Klaren sein, in welcher Form das Schwarze Loch Energie verliert und somit dergleichen für die Hawking-Strahlung zur Verfügung stellt. Nach kurzer Überlegung wird klar, dass nur eine Energieform aus dem Inneren des Schwarzschildradius übertragen werden kann – die Gravitation.



Die Gravitationskraft wirkt also auf eines der Photonen des Paares so ein, dass es in Richtung Ereignishorizont „beschleunigt“ wird. Dass ein Photon sich stets mit Lichtgeschwindigkeit bewegt und damit nicht wirklich beschleunigt werden kann, ist sicher bekannt, aber seine Energie wird im Gravitationsfeld dennoch erhöht – und zwar durch einen Anstieg seiner Frequenz. Umso mehr es sich dem Rand des Schwarzen Lochs nähert, umso mehr wird seine Wellenlänge ins Blaue verschoben.
Wir nehmen also vorerst eine Beschleunigung des Photons, das sich Richtung Ereignishorizont bewegt, an und werden diese später durch eine Frequenzerhöhung ersetzen. Es gilt demnach vorläufig die unveränderte Formel der potentiellen Energie eines Körpers im Gravitationsfeld.

$$E_{pot} = m \cdot a \cdot d$$

Wobei m die Masse des Probekörpers, im dem Fall des Photons, a die Beschleunigung und d der Abstand zum Ereignishorizont ist.
Im Folgenden werden wir diese Faktoren sinnvoll ersetzen.
Beginnen wir mit der Masse m.
Hier machen wir uns Einsteins berühmteste Formel zu nutze, nachdem Energie direkt proportional zur Energie ist und stellen diese nach m um.

$$E = m \cdot c^2$$

$$m = \frac{E}{c^2}$$

Die Energie eines Lichtquants lässt dich bekanntlich durch

$$E_{ph} = h \cdot f$$

bestimmen, wobei h das Plancksche Wirkungsquantum ($6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Js)und f die Frequenz darstellt. Beim Zusammensetzten dieser Formel ergibt sich für die Masse eines Photons

$$m = \frac{h \cdot f}{c^2}.$$

Da es sich aber um ein Photonenpaar handelt und die gesamte Energie, die aus dem Vakuum entnommen wurde, ersetzt werden muss, muss dieser Term verdoppelt werden. So erhalten wir für die Masse

$$m = \frac{2 \cdot h \cdot f}{c^2}.$$

Wenden wir uns nun der Beschleunigung a zu. Diese können wir als konstant annehmen, da ein virtuelles Photon aufgrund seiner kurzen Existenz (siehe oben), nur eine geringe Strecke zurücklegen kann, wodurch natürlich kaum zu unterscheidende Änderungen im Gravitationsfeld unberücksichtigt bleiben können. Die Beschleunigung a lässt sich abgeleitet aus dem Newtonschen Axiom

$$F = m \cdot a$$

, wobei F die Kraft und m die Masse des zu beschleunigten Körper darstellt, als

$$a = \frac{F}{m}$$

definieren. Wie schon festgestellt ist die hier wirkende Kraft die Gravitationskraft F_G. Somit können wir die Kraft durch Newtons Gravitationsgesetz ersetzen.

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

Dabei ist M die Masse des Schwarzen Lochs, m die Masse des Photons und r der Abstand der beiden Punktmassen, also die Entfernung zwischen der Singularität des kompakten Objekts und den Photon. Im Folgenden wollen wir diesen Abstand r ersetzen. Dabei gehen wir von der Annahme aus, dass der Abstand des Photons vom Mittelpunkt gleich dem Schwarzschildradius. Dies entspricht zwar nicht dem exakten Wert, aber bei einen Schwarzschildradius R von einigen Kilometern, lässt sich der Abstand des Photons zum Ereignishorizont von einigen Nanometern ohne weiteres vernachlässigen. Es gilt im Folgenden also

$$r = R$$

Die Formel zum berechnen des Schwarzschildradius R lautet, wie oben hergeleitet

$$R = G \cdot \frac{2M}{c^2}$$

Setzten wir nun diesen Term für den Abstand r zur Singularität ein erhalten wir

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{\left(G \cdot \frac{2 \cdot M}{c^2}\right)^2} = G \cdot \frac{M \cdot m}{G^2 \cdot \frac{4 \cdot M^2}{c^4}} = \frac{m \cdot c^4}{4 \cdot G \cdot M}$$

Setzen wir dies in die Gleichung zur Berechnung der Beschleunigung a ein erhalten wir nach Kürzen

$$a = \frac{F_G}{m} = \frac{\frac{m \cdot c^4}{4 \cdot G \cdot M}}{m} = \frac{c^4}{4 \cdot G \cdot M}$$

Jetzt muss nur der Weg d, also der Abstand zwischen Ereignishorizont und Entstehung des Photons, berechnet werden. Dabei ist der Weg d formuliert als

$$d = t \cdot v$$

, wobei t die Zeit und v die Geschwindigkeit ist. V können wir allerdings sofort mit der Lichtgeschwindigkeit c ersetzten, da es sich um ein Photon handelt.

$$d = t \cdot c\ .$$

Die Zeit t lässt sich ebenso einfach ersetzen, da sich der Existenzzeit des Photons entspricht und wir diese oben bereits berechnet haben.

$$\Delta t = \frac{1}{8\pi \cdot f}$$

Es ergibt sich für den Weg d

$$d = \frac{c}{8\pi \cdot f}\ .$$

Fassen wir nun alle unsere Ergebnisse zusammen und ersetzten die Masse m, die Beschleunigung a und den Abstand d in Formel der potentiellen Energie

$$E = m \cdot a \cdot d$$

$$m = \frac{2 \cdot h \cdot f}{c^2}$$

$$a = \frac{c^4}{4 \cdot G \cdot M}$$

$$d = \frac{c}{8\pi \cdot f}$$

erhalten wir

$$E = \frac{2 \cdot h \cdot f}{c^2} \cdot \frac{c^4}{4 \cdot G \cdot M} \cdot \frac{c}{8\pi \cdot f}.$$

Vereinfacht ergibt sich für die Energie eines Photons der Hawkingstrahlung, einzig abhängig von der Masse M des Schwarzen Lochs

$$E = \frac{h \cdot c^3}{16\pi \cdot G \cdot M}.$$

6. Temperatur eines Schwarzen Lochs

Wie oben schon angedeutet, hat die Hawking-Strahlung eine ähnliche Verteilung, wie die so genannte Hohlraumstrahlung, was die Existenz einer Temperatur vermuten lässt.
Um die nun folgenden Zusammenhänge zu verstehen wenden wir uns zuerst der Klärung der Hohlraumstrahlung zu.
Als Hohlraumstrahlung wird die Strahlung definiert, die ein absolut schwarzer Körper emittiert. Ein solcher Körper absorbiert also Strahlung jeder erdenklichen Wellenlänge und ist somit ein perfekter Absorber. Da er also Strahlung aller Wellenlängen absorbiert und keine Strahlung des elektromagnetischen Spektrums reflektiert ist er logischerweise schwarz. In der Realität lassen sich aber allenfalls fast Schwarze Körper finden.
Nach der 1792 formulierten Theorie von Prévosts ist ein Schwarzer Körper nicht nur der perfekte Absorber sondern auch der beste Strahler - ein so genannter „schwarzer Strahler“. Das Besondere an einem solchen Körper ist, dass die Intensität der verschiedenen Wellenlängen in seiner emittierten Strahlung einzig und allein von seiner Temperatur T abhängig ist. Des Weiteren wird, je höher die Temperatur eines schwarzen Strahlers ist, mehr Energie, also mehr Photonen, pro Wellenlänge emittiert. Die Intensität jeglicher Wellenlängen wird also erhöht – der Körper wird heller. Die Wellenlänge mit der maximalen Intensität verschiebt sich umso mehr ins Blaue, je heißer der schwarze Strahler ist. Es gilt eine Folgerung aus dem Wienschen Verschiebungsgesetz.

$$\lambda_{\max} \cdot T = const \approx 2897{,}8 \cdot 10^{-3}\,\mu mK = 2{,}8978 \cdot 10^{-3}\,mK$$

$\lambda_{\max}$ = Wellenlänge maximaler Intensität
T = Temperatur in Kelvin
$2897{,}8 \cdot 10^{-3}\,\mu mK = 2{,}8978 \cdot 10^{-3}\,mK$ = wiensche Verschiebungskonstante

Wir halten also fest, dass die von einem schwarzen Körper ausgesandte Strahlung „Hohlraumstrahlung“ oder „Temperaturstrahlung“ heißt und seine Strahlungsintensität und sein Spektrum allein von seiner Temperatur T abhängig ist.
Damit sollte die Frage nach der Hohlraumstrahlung geklärt sein.
Wie schon erwähnt, gelten für die Hawkingstrahlung und der Hohlraumstrahlung die gleichen Gesetze. Also gilt auch das schon angesprochene Wiensche Verschiebungsgesetz.

$$\lambda_{\max} = \frac{h \cdot c}{\chi \cdot k \cdot T}$$

Dabei zu klärende und nicht oben erwähnte Komponenten sollten χ, ein numerischer Wert, der sich aus der Herleitung des Gesetzes ergibt und ungefähr mit $\chi \approx$ 2,9651142317 gegeben ist, und $k \approx 1{,}38 \cdot 10^{-23} JK^{-1}$, was der Boltzmann-Konstante entspricht, sein.
Es gilt außerdem folgende Gleichung, die durch den Umstand, dass es sich um die Maximalwerte der Wellenlängen beziehungsweise Frequenzen der Hohlraumstrahlung handelt, eine kleine Abweichung von ihrer normalen Formulierung enthält.

$$f_{\max} = 0{,}568 \frac{c}{\lambda_{\max}}$$

Mit diesem Wissen fällt es nun leicht eine Formel zur Temperaturbestimmung herzuleiten.
Wir stellen zuerst die letztere Gleichung nach $\lambda_{\max}$ um,

$$\lambda_{\max} = 0{,}568 \frac{c}{f_{\max}}$$

und setzten diese in die Formel des Wienschen Verschiebungsgesetz ein.

$$0{,}568 \frac{c}{f_{\max}} = \frac{h \cdot c}{\chi \cdot k \cdot T}$$

Die Lichtgeschwindigkeit c lässt sie eliminieren.

$$0{,}568 \frac{1}{f_{\max}} = \frac{h}{\chi \cdot k \cdot T}$$

Mit ein bisschen Verstand erkennt man hier die versteckte Formel der Energie eines Lichtquants.

$$E_{ph} = h \cdot f$$

Wir stellen nun also nach $h \cdot f_{\max}$ um:

$$h \cdot f_{\max} = E_{ph} = 0{,}568 \cdot \chi \cdot k \cdot T$$

Nun wissen wir aber auch, nach den oben angestellten Berechnungen der Hawkingstrahlung, dass die Energie eines Photons dieser Strahlung mit

$$E = \frac{h \cdot c^3}{16\pi \cdot G \cdot M}$$

berechenbar ist. Diesen Term können wir nun für die Energie des Photons einsetzen und erhalten

$$0{,}568 \cdot \chi \cdot k \cdot T = \frac{h \cdot c^3}{16 \cdot \pi \cdot G \cdot M}$$

Fassen wir an dieser Stelle die Faktoren 0,568 und χ zusammen.

$$0{,}568 \cdot \chi = 2{,}82$$

Nach umstellen auf die Temperatur T ergibt sich die endgültige Formel.

$$T = \frac{1}{2{,}82 \cdot k} \cdot \frac{h \cdot c^3}{16 \cdot \pi \cdot G \cdot M}$$

Es ist natürlich noch möglich alle bekannten Konstanten zu ersetzen. In diesem Fall würde man Folgendes erhalten.

$$T \approx \frac{1{,}368 \cdot 10^{23}}{M} Kkg$$

Man sieht, dass die Temperatur T eines Schwarzen Lochs nur von dessen Masse M abhängig ist und, dass je masseärmer das kompakte Objekt wird, desto höher wird die Temperatur.
Wir haben nun zwar eine Formel für die Temperatur des Schwarzen Lochs hergeleitet, diese ist aber leider nur ein Annäherung an die exakte Formel, die um einiges schwieriger herzuleiten ist. Den „Fehler“, den wir bei unserer Herleitung gemacht haben ist, dass wir nicht alle Photonen, sondern nur die sich radial entfernenden Lichtteilchen beachtet haben. In der Realität müssen natürlich alle Photonen in die Rechnung mit einbezogen werden, egal, mit welchem Winkel sie sich vom Schwarzschildradius entfernen. Die exakte Formel für die Temperatur lautet:

$$T = \frac{h \cdot c^3}{16 \cdot \pi^2 \cdot k \cdot G \cdot M} \approx \frac{1{,}228 \cdot 10^{23}}{M} Kkg$$

Unser Faktor 2,82 wurde in der exakten Formel also durch ein weiteres Pi ersetzt. Aber unsere Approximation war schon recht gut.

7. Leuchtkraft eines Schwarzen Lochs

Die Leuchtkraft L eines Objekts gibt seine Energieabstrahlung in Form von elektromagnetischer Strahlung seines gesamten Spektrums pro Sekunde an, und ist allein von seiner Temperatur T und seiner Oberfläche A abhängig.
Für einen Schwarzen Strahler, und somit auch für ein Schwarzes Loch, gilt

$$L = \sigma \cdot A \cdot T^4$$

Die Konstante σ entspricht der Stefan-Boltzmann-Konstante und ist mit

$$\sigma = \frac{2 \cdot \pi^5 \cdot k^4}{15 \cdot h^3 \cdot c^2} \approx 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

gegeben. Die restlichen Faktoren sinnvoll zu ersetzen sollte kein Problem darstellen. Die Formel der Temperatur T wissen wir schon aus dem letzten Abschnitt.

$$T = \frac{h \cdot c^3}{16 \cdot \pi^2 \cdot k \cdot G \cdot M}$$

Bleibt noch die Fläche A. Die für die Strahlungsentstehung relevante Fläche entspricht dem Ereignishorizont, da nur in seiner unmittelbaren Nähe die Hawkingstrahlung entsteht. Dies Fläche A entspricht also einer Kugeloberfläche mit dem Ausmaß des Schwarzschildradius R, der uns ebenfalls aus oberen Berechnungen bekannt seien sollte, was uns die Herleitung dieser Fläche A leicht macht.

$$A = 4 \cdot \pi \cdot R^2$$

$$R = G \cdot \frac{2M}{c^2}$$

$$\Rightarrow A = 4 \cdot \pi \cdot \left(G \frac{2M}{c^2} \right)^2 = G^2 \cdot \frac{16 \cdot \pi \cdot M^2}{c^4}$$

Setzten wir nun also unsere bekannten Fragmente zusammen.

$$L = \sigma \cdot A \cdot T^4$$

$$L = \frac{2 \cdot \pi^5 \cdot k^4}{15 \cdot h^3 \cdot c^2} \cdot G^2 \cdot \frac{16 \cdot \pi \cdot M^2}{c^4} \cdot \left(\frac{h \cdot c^3}{16 \cdot \pi^2 \cdot k \cdot G \cdot M} \right)^4$$

Nun das Ganze nur noch vereinfachen und man erhält die fertige Formel.

$$L = \frac{2 \cdot \pi^5 \cdot k^4}{15 \cdot h^3 \cdot c^2} \cdot G^2 \cdot \frac{16 \cdot \pi \cdot M^2}{c^4} \cdot \frac{h^4 \cdot c^{12}}{65536 \cdot \pi^8 \cdot k^4 \cdot G^4 \cdot M^4}$$

$$L = \frac{32 \cdot \pi^6 \cdot k^4 \cdot G^2 \cdot M^2 \cdot h^4 \cdot c^{12}}{983040 \cdot h^3 \cdot c^6 \cdot \pi^8 \cdot k^4 \cdot G^4 \cdot M^4}$$

$$L = \frac{h \cdot c^6}{30720 \cdot \pi^2 \cdot G^2 \cdot M^2}$$

Setzten wir nun die Werte der Konstanten ein, und wir erhalten einen kompakte Annäherungsformel.

$$L \approx \frac{3{,}568 \cdot 10^{32}}{M^2} Wkg^2$$

Das Ganze gilt natürlich nur unter der Bedingung, dass das Schwarze Loch keine Materie akkretiert. Die hier hergeleitete Formel berechnet ausschließlich die Leuchtkraft der Hawkingstrahlung. Die letztendlich reelle Leuchtkraft eines Schwarzen Lochs ist von der Masse der in der Akkretionsscheibe vorhandenen Materie abhängig, wodurch enorme Leuchtkräfte entstehen können, die auf einer räumlichen Verteilung in der Größenordnung unseres Sonnensystems die Energie von 10^{10} Sonnenleuchtkräften erzeugen können.

8. Lebensdauer eines Schwarzen Lochs

Ein Schwarzes Loch nimmt nur unter der Bedingung an Masse ab, und nähert sich damit seiner Auflösung, wenn die durch die Hawkingstrahlung abgegebene Energie pro Zeit P_H größer ist als die durch die Akkretion aufgenommen energieäquivalente Masse pro Zeit P_A. Es muss also folgendes erfüllt sein.

$$P_H > P_A$$

Kurz: Die Leistung der Akkretion muss geringer sein als die der Hawkingstrahlung. Wir untersuchen nun aber den leichtesten Fall, nämlich den einer Akkretionsrate von Null. Das heißt, nur die Anfangsmasse M_0 des Schwarzen Lochs muss durch die Hawkingstrahlung „abgebaut" werden.
Die Leistung P_H der Hawkingstrahlung ist uns bereits bekannt, denn sie ist nichts anderes als die Leuchtkraft L.

$$P_H = L = \frac{h \cdot c^6}{30720 \cdot \pi^2 \cdot G^2 \cdot M^2}$$

Wir wissen außerdem, dass folgendes gilt.

$$P = -\frac{dE}{dt}$$

Die Energie E können wir durch $E=mc^2$ ersetzten und erhalten so die nachstehende Gleichung.

$$-\frac{dM \cdot c^2}{dt} = \frac{h \cdot c^6}{30720 \cdot \pi^2 \cdot G^2 \cdot M^2}$$

Da die Lichtgeschwindigkeit c konstant ist, ist es möglich diese zu kürzen.

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{h \cdot c^4}{30720 \cdot \pi^2 \cdot G^2 \cdot M^2}$$

Nun versuchen wir alle Konstanten in einem Term zusammenzufassen, um diesen dann durch eine neue Konstante N zu ersetzten.

$$\frac{dM}{dt} \cdot M^2 = -\frac{h \cdot c^4}{30720 \cdot \pi^2 \cdot G^2}$$

$$N = \frac{h \cdot c^4}{30720 \cdot \pi^2 \cdot G^2} \approx 3{,}968 \cdot 10^{15} \frac{kg^3}{s}$$

$$\Rightarrow M^2 \cdot \frac{dM}{dt} = -N$$

Um später diese Gleichung formal durch Integration zu lösen eliminieren wir den Bruch. Es ergibt sich

$$M^2 \cdot dM = -N \cdot dt$$

Die Grenzen der Integration sind bei der Masse von der Anfangsmasse bis zur kompletten Zerstrahlung des Schwarzen Lochs, also bis Null zu setzten. Die Zeit wird begrenzt vom Zeitpunkt Null, die einhergeht mit der Anfangsmasse, und der Endzeit, welche der letztendlichen Lebenszeit t_E entspricht.

$$\int_{M_o}^{0} M^2 \cdot dM = \int_{0}^{t_E} -N \cdot dt$$

Dabei kann –N als eine Konstante aus der Integration entfernt werden.

$$\int_{M_o}^{0} M^2 \cdot dM = -N \cdot \int_{0}^{t_E} dt$$

Nach erfolgreicher Integration ergibt sich

$$\left[\frac{M^3}{3}\right]_{M_0}^{0} = -N \cdot [t]_0^{t_E}$$

Nun müssen nur noch die oberen und unteren Grenzen eingesetzt werden.

$$-\frac{M_0^{\ 3}}{3} = -N \cdot t_E$$

Stellen wir jetzt die Gleichung nach t_E um, erhalten wir die gesuchte Formel für die Lebenszeit eines Schwarzen Loch in Abhängigkeit von seiner Anfangsmasse M_0, unter der Annahme einer Null-Akkretion.

$$t_E = \frac{M_0^{\ 3}}{3 \cdot N}$$

Zur Erinnerung: $N = \frac{h \cdot c^4}{30720 \cdot \pi^2 \cdot G^2} \approx 3{,}968 \cdot 10^{15} \frac{kg^3}{s}$

9. Schwarzlochentropie

Mit der Erkenntnis, dass Schwarze Löcher thermische Strahlung aussenden, geht auch die Überlegung der Existenz einer Entropie S einher. Die Formel der Entropie ergibt sich sowohl aus Überlegungen der Thermodynamik, als auch auf Basis quantenmechanischer Phänomene. Dies fand Stephen Hawking auf Grundlage der Doktorarbeit von Jacob Bekenstein im Jahre 1973 heraus. Deshalb spricht man auch von der Hawking-Bekenstein-Entropie. Auf die genaue Herleitung möchte ich hier allerdings verzichten und zeige die Formel lediglich auf.

$$S = \frac{A \cdot k \cdot c^3}{4 \cdot \hbar \cdot G}$$

Dabei fällt auf, dass die Schwarzlochentropie einzig und allein von der Fläche des Ereignishorizonts abhängig ist und die restlichen Bestandteile der Formel Naturkonstanten sind.
Interessanterweise addieren sich die Ereignishorizonte beziehungsweise die Entropien zweier kollidierender und verschmelzender Schwarzer Löcher nicht einfach. Der Ereignishorizont des neu entstandenen Schwarzen Lochs ist größer als die Summe der beiden Vorigen. Dies lässt sich anhand einer einfachen Rechung erklären. Die Entropie ist wie schon erwähnt nur von der Fläche des Ereignishorizonts abhängig. Diese Fläche entspricht, der einer ganz normalen Kugel, also

$$A = 4\pi \cdot R^2$$

Wir brauchen dabei allerdings nur die Verhältnisse der Quadrate der Schwarzschildradien zu untersuchen, da die 4 Pi konstant bleiben. Wir nehmen als zwei Schwarze Löcher mit den Massen M_1 und M_2 an.
Der Schwarzschildradius des einen Schwarzen Lochs wäre gegeben durch

$$R_1 = G \cdot \frac{2M_1}{c^2}$$

und der des anderen durch

$$R_2 = G \cdot \frac{2M_2}{c^2}.$$

Addieren wir die Radienquadrate ergibt sich

$$R_1^{\,2} + R_2^{\,2} = \left(G \frac{2M_1}{c^2} \right)^2 + \left(G \frac{2M_2}{c^2} \right)^2 .$$

Das Radienquadrat eines Schwarzen Lochs, das aus den Massen M1 und M2 der beiden Schwarzen Löcher zusammengesetzt ist, lässt sich hingegen durch

$$\left(R_{M_1+M_2}\right)^2 = \left(G\frac{2(M_1+M_2)}{c^2}\right)^2$$

beschreiben. Nun können wir alle Konstanten für unsere weiteren Überlegungen wegfallen lassen, und konzentrieren uns auf die einzigen Variablen, den Massen M_1 und M_2.
Für

$$R_1^{\ 2} + R_2^{\ 2} = \left(G\frac{2M_1}{c^2}\right)^2 + \left(G\frac{2M_2}{c^2}\right)^2$$

folgt

$$M_1^{\ 2} + M_2^{\ 2}.$$

Für

$$\left(R_{M_1+M_2}\right)^2 = \left(G\frac{2(M_1+M_2)}{c^2}\right)^2$$

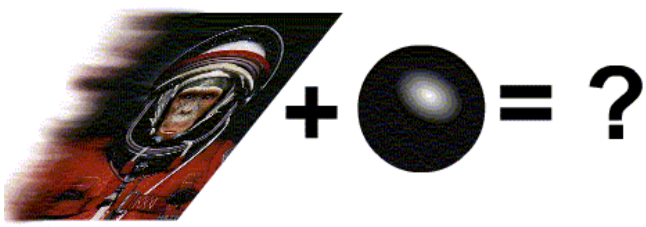
ergibt sich

$$(M_1+M_2)^2 = M_1^{\ 2} + 2\cdot M_1\cdot M_2 + M_2^{\ 2}$$

$$\Rightarrow M_1^{\ 2} + M_2^{\ 2} < M_1^{\ 2} + 2\cdot M_1\cdot M_2 + M_2^{\ 2}$$

Durch das bloße Betrachten der Massen fällt auf, dass das verschmolzene Schwarze Loch stets größer ist, als seine beiden Bestandteile.
Da der Schwarzschildradius proportional zur Oberfläche A des Ereignishorizonts, und dieser wiederum proportional zur Entropie steht, ist auch die Schwarzlochentropie des verschmolzenen Schwarzen Lochs größer, als die Einzelentropien der beiden kollidierenden kompakten Objekte. Dies entspricht auch dem zweiten Hauptsatz der Schwarzloch-Dynamik, die von Stehen Hawking formuliert wurde: Die Summe der Flächen der Ereignishorizonte kann niemals Abnehmen, egal was mit den Schwarzen Löchern passiert. Das gilt sowohl für zwei kollidierende Schwarze Löcher, als auch für jeglichen andern erdenklichen Prozess.
Im Übrigen sind Schwarze Löcher diejenigen Objekte mit der größer Entropie, im vergleich zu allen anderen bekannten physikalischen Systemen gleicher Masse.

10. Informationsverlustparadoxon



Wie schon unter „Charakterisierung eines Schwarzen Lochs“ geklärt, lassen sich derartige kompakte Objekte allein durch ihre Masse, ihre

elektrische Ladung und ihren Drehimpuls vollständig beschreiben. Dies ist das von Werner Israel aufgestellte Eindeutigkeits-Theorem oder No-Hair-Theorem. Dass würde aber auch bedeutet, dass keine weiteren direkten Eigenschaften eines Schwarzen Lochs existieren – ich sehe die Hawkingstrahlung also als eine Art indirekte Eigenschaft an, da sie außerhalb des Ereignishorizonts entsteht (außerdem ist sie rein thermischer Natur).
Es sind also keine weiteren Informationen aus dem Inneren des Schwarzen Lochs entnehmbar. Dieser Überlegung zu Grunde, geht jegliche Information über Materie, die hinter dem Ereignishorizont verschwindet, verloren, was auch auf der etwas unüblichen oberen Abbildung verdeutlicht werden soll. Dies ist aber ein Verstoß gegen die Erhaltung geglichen Information in der Physik. Beobachtet man demzufolge ein sich zerstrahlendes Schwarzes Loch, so ist es dem Beobachter nicht möglich, die beliebige Entstehungsgeschichte des Schwarzen Lochs abzuleiten. Man könnte demnach sagen Schwarze Löcher sind Informationsvernichter, ähnlich einem Papierschredder, nur dass sich die Papierfetzen sich nicht mehr zusammenkleben lassen.
Seit der „International Conference of General Relativity and Gravitation“ 2004 in Dublin kommt aber eine andere Meinung in der Physikwelt auf. So verkündete Stephen Hawking, dass seiner Meinung Schwarze Löcher doch „Haare“ haben könnte, also die Informationen auf irgendeiner Weise doch erhalten bleiben.
Und auch Roger Penrose, John Preskill und Juan Maldacena nehmen an, dass gewisse Informationen den Ereignishorizont nach außen dringen können.
Die Papierfetzen lassen sich vielleicht also doch wieder zusammensetzen. Die weitere Entwicklung in der Forschung im Bereich der Schwarzen Löcher verspricht dementsprechend interessant zu werden.

11. Schlusswort

In den hier angestellten Überlegungen wurde stets von der Schwarzschildmetrik ausgegangen, die ein statisches Schwarzes Loch, ohne elektrische Ladung Q und ohne Drehimpuls L beschreibt.
Des Weiteren gibt es die realitätsnäheren Beschreibungen, wie die Kerr-Metrik ($L \neq 0$ und $Q=0$), die Reissner-Nordstrom-Metrik ($L=0$ und $Q \neq 0$) und die exakteste Form, die Kerr-Newman-Metrik, die sowohl eine elektrische Ladung, als auch einen Drehimpuls berücksichtigt. So ergeben sich zum Beispiel bei Beachtung dieser Eigenschaften kleinere Ereignishorizonte, als ohne.
In diesem Aufsatz habe ich versucht die grundlegenden Phänomene eines Schwarzen Lochs näher und vor allem größtenteils mathematisch zu erklären. Ich hoffe es ist mir auf eine einfache Weise gelungen.

Bildquellen:

- http://starchild.gsfc.nasa.gov/docs/StarChild/universe_level1/black_holes.html
- http://sprott.physics.wisc.edu/pickover/graphcp.html
- http://www.stern.de/wissenschaft/kosmos/534777.html?nv=ct_mt
- http://www.celestiamotherlode.net/catalog/fictional.php
- http://www.mpa-garching.mpg.de/mpa/research/current_research/hl2005-2b/hl2005-2b-en.html