Herleitung der Zeitdilatation der Speziellen Relativitätstheorie aus der Betrachtung einer „Lichtuhr“

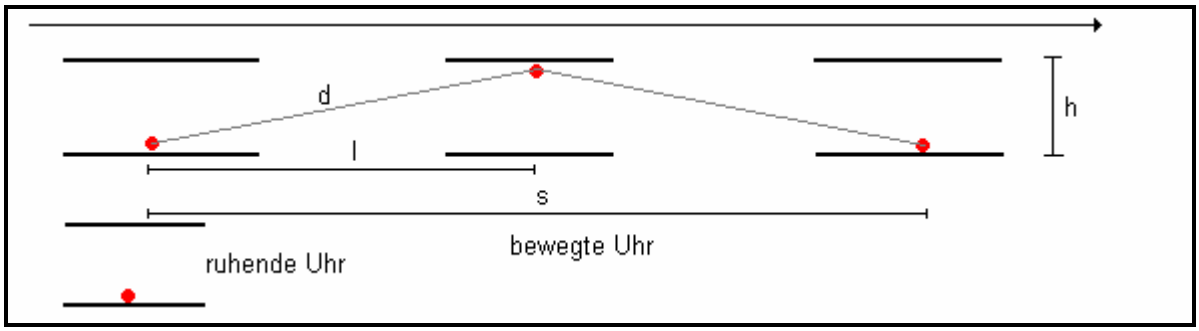
Was ist Zeit?

Um die folgende Herleitung zu verstehen, sollte man sich der Definition des Zeitbegriffs klar sein, was allerdings im Relativistischen Zusammenhang recht schwierig auszudrücken ist. Wir wollen es bei der Definition einer Uhr belassen, mit der bekanntlich die Zeit gemessen wird:
Das Gerät Uhr durchläuft einen vollkommen regelmäßigen Bewegungszyklus.
Die Zeit wird also durch das „Zähle“ bzw. der Anzahl der durchlaufenen Zyklen bestimmt.

Was ist eine Lichtuhr?

Da wir uns mit dem „Verhalten“ der Zeit bei hohen Geschwindigkeiten beschäftigen wollen, soll uns die einfachste Form einer Uhr zur Anschauung dienen, die Lichtuhr. Eine solche Lichtuhr besteht aus zwei parallelen und reflektierenden Platten/Spiegeln, zwischen denen ein Photon hin- und hergeschickt wird. Ein Zyklus dieser Uhr ist beendet, wenn das Photon nach einmaliger Reflexion an dem parallelen Spiegel in seine Ausgangsposition zurückkehrt (siehe Skizze).

Skizze einer ruhenden und einer bewegten Lichtuhr:



Gegebenes:

Eine zu uns ruhende Lichtuhr und eine sich in Relativbewegung befindende Lichtuhr, mit der <u>konstanten</u> Geschwindigkeit v.
Des Weiteren sind die in der Skizze erkennbaren Variablen gegeben.

Betrachtung:

Das Photon in der bewegten Lichtuhr muss im Gegensatz zum Photon der ruhenden Uhr einen längeren Weg zurücklegen, da sich seine Bewegung aus zwei Teilbewegungen zusammensetzt (siehe Skizze). Dieses Photon muss sich sowohl vertikal, als auch horizontal bewegen.
Dabei lässt sich die Hälfte dieser Wegstrecke d durch den Satz des Pythagoras errechen:

$$d^2 = l^2 + h^2$$

Die Gesamtstrecke (2d), die das Photon zurücklegen muss, um einen vollkommenen Zyklus zu durchlaufen ist demnach:

$$2 \cdot (d^2 = l^2 + h^2)$$

Der Weg, den dabei die Uhr selbst zurücklegt (s) lässt durch

$$s = v \cdot t$$

ausdrücken. Die Variable l lässt sich nun folgendermaßen ersetzen:

$$l = \frac{v \cdot t}{2}$$

Da es sich bei s um den kompletten Weg handelt, den die Uhr zurücklegt, in der ein Zyklus aus unserer Sicht vergangen ist, muss s halbiert werden.
Es ergibt sich nach sinnvollen einsetzten:

$$x = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{v \cdot t}{2}\right)^2 + h^2}$$

Wobei x als neue Variable für den Gesamtweg, den das Photon für einen kompletten Zyklus zurücklegen muss, eingeführt wird.
Da die Zeit als Weg durch Geschwindigkeit definiert ist, lautet die entsprechende Formel für die Zeit in unserem Beispiel:

$$t = \frac{x}{v}$$

Die Geschwindigkeit, die hier noch mit v bezeichnet ist, beträgt bei einem Photon bekanntlich Lichtgeschwindigkeit und kann somit mit c ersetzt werden. Es ergibt sich:

$$t = \frac{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{v \cdot t}{2}\right)^2 + h^2}}{c}$$

Da wir uns mit der Zeit beschäftigen Läsen wir diese Gleichung nach t auf:

1. Quadrieren:

$$t^2 = \frac{4 \cdot \left(\left(\frac{v \cdot t}{2}\right)^2 + h^2\right)}{c^2}$$

2. Ausmultiplizieren:

$$t^2 = \frac{v^2 \cdot t^2 + 4h^2}{c^2}$$

3. mit c^2 multiplizieren:

$$t^2 \cdot c^2 = v^2 \cdot t^2 + 4h^2$$

4. subtrahieren von ($v^2 \cdot t^2$)

$$t^2 \cdot c^2 - v^2 \cdot t^2 = 4h^2$$

5. t^2 ausklammern:

$$t^2(c^2 - v^2) = 4h^2$$

6. Division von (c^2-v^2):

$$t^2 = \frac{4h^2}{(c^2 - v^2)}$$

7. Wurzel ziehen:

$$t = \frac{2h}{\sqrt{(c^2 - v^2)}}$$

Die Zeit, die ein Photon der bewegten Lichtuhr für ein Zyklus benötigt ist also offensichtlich länger, umso größer die Relativgeschwindigkeit v dieser beobachteten Uhr ist. Durch den größer werdenden Wert von v verringert sich der Nenner und der t-Wert (die Zeit) vergrößert sich.
Für weitere Betrachtungen und zum besseren Verständnis wollen wir dies als die Zeit der bewegten Uhr mit dem Index „bewegt“ bezeichnen:

$$t_{bewegt} = \frac{2h}{\sqrt{(c^2 - v^2)}}$$

Im Gegensatz dazu gilt für das Photon der ruhenden Lichtuhr:

$$t_{ruhe} = \frac{2h}{c}$$

Bringen wir nun diese beiden Gleichungen mit etwas Algebra in den Zusammenhang:

1. $t_{ruhe} = \frac{2h}{c}$ nach 2h umstellen:

$$2h = t_{ruhe} \cdot c$$

2. in $t_{bewegt} = \frac{2h}{\sqrt{(c^2 - v^2)}}$ einsetzten:

$$t_{bewegt} = \frac{t_{ruhe} \cdot c}{\sqrt{(c^2 - v^2)}}$$

3. quadrieren:

$$t_{bewegt}{}^2 = \frac{t_{ruhe}{}^2 \cdot c^2}{c^2 - v^2}$$

4. umformen:

$$t_{bewegt}{}^2 = \frac{t_{ruhe}{}^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

5. Wurzel ziehen:

$$t_{bewegt} = \frac{t_{ruhe}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Fazit

Diese Gleichung bringt die Zeit der ruhenden und der in Relativbewegung befindlichen Uhr in den Zusammenhang. Die Zeit eines bewegten Körper vergeht also gemäß dieser Formel für einen außerhalb befindlichen Beobachter umso langsamer, je größer der Betrag der Relativgeschwindigkeit ist.
Dies gilt nicht nur für Lichtuhren, sondern ist allgemein für alle Objekte im Universum gültig (was auch experimentell nachweisbar ist).